Zaczniemy od tych najprostszych, a skończymy na najbardziej abstrakcyjnych.

1 Liczby trójkątne

Łatwo zauważyć, że n-ta liczba trójkątna to po prostu suma liczb od 1 do n, czyli $\frac{n(n+1)}{2}$. Mamy już wzór, ale przypatrzmy się jeszcze trójkątowi Pascala:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & \mathbf{3} & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & \mathbf{6} & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & \mathbf{10} & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & \mathbf{15} & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & \mathbf{21} & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Jak widzimy, wyróżnione liczby to kolejne liczby trójkątne. Ponieważ znamy wzór na elementy w trójkącie Pascala, więc możemy przedstawić w inny sposób n-tą liczbę trójkątną:

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot 2!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Do trójkąta Pascala jeszcze powrócimy.

2 Liczby wielokątne

Zauważmy, że gdy mając zbudowaną $n-1$ liczbę k-kątną, to aby otrzymać następną musimy dołożyć na $k-2$ bokach po n kulek. Jednak w ten sposób policzymy dwukrotnie kule, które są na styku boków. Musimy pomniejszyć tę liczbę o $k-3$. Możemy więc zapisać wzór jako sumę:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(i(k-2)-(k-3)) &= \sum_{i=1}^{n} i(k-2) - n\cdot(k-3) = \\
&= (k-2)\cdot\sum_{i=1}^{n} i - n(k-3) = \\
&= (k-2)\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n(k-3) = \\
&= \frac{n}{2}((n+1)(k-2) - 2(k-3)) = \\
&= \frac{n}{2}((n+1)(k-2) - 2(k-2) + 2) = \\
&= n\cdot\frac{(n-1)(k-2)+2}{2}
\end{aligned}
$$

3 Liczby piramidalne

Zgodnie z definicją możemy zapisać wzór na n-tą liczbę k-kątną piramidalną jako sumę:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{(i-1)(k-2)+2}{2} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i-1)(k-2)}{2} + \sum_{i=1}^{n} i \\
&= (k-2) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \\
&= (k-2) \cdot \sum_{i=2}^{n} \frac{i(i-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \\
&= (k-2) \cdot \sum_{i=2}^{n} \binom{i}{2} + \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Przedostatnie przejście jest prawidłowe ze względu na to, że dla $i = 1$ wartość wyrażenia $\frac{i(i-1)}{2}$ wyniesie 0. Wrócimy teraz do trójkąta Pascala i dwumianu Newtona. Poniższy wzór łatwo udowodnić indukcyjnie, nie będę jednak tego tutaj czynił.

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{1}$$

dla $n, k \in \mathbb{N}$

Korzystając z tej równości przekształcamy dalej:

$$\begin{aligned}
(k-2) \cdot \sum_{i=2}^{n} \binom{i}{2} + \frac{n(n+1)}{2} &= (k-2) \cdot \binom{n+1}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \\
&= (k-2) \cdot \frac{(n+1)!}{(n-2)! \cdot 3!} + \frac{n(n+1)}{2} = \\
&= (k-2) \cdot \frac{(n-1)n(n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \\
&= \frac{n(n+1)}{6}((k-2)(n-1)+3)
\end{aligned}$$

4 Liczby 4-wymiarowe

Również korzystając z definicji rozpisujemy wzór na n-tą liczbę k-kątną 4-wymiarową:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{6}((k-2)(i-1)+3) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{6}(k-2)(i-1) + \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \\
&= (k-2) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)i(i+1)}{6} + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{i(i-1)}{2} = \\
&= (k-2) \cdot \sum_{i=2}^{n+1} \frac{i(i-1)(i-2)}{6} + \sum_{i=2}^{n+1} \binom{i}{2} = \\
&= (k-2) \cdot \sum_{i=3}^{n+1} \frac{i(i-1)(i-2)}{6} + \binom{n+2}{3} = \\
&= (k-2) \cdot \sum_{i=3}^{n+1} \binom{i}{3} + \binom{n+2}{3} = \\
&= (k-2) \cdot \binom{n+2}{4} + \binom{n+2}{3} = \\
&= (k-2) \cdot \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{24} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{24} \cdot ((k-2)(n-1)+4)
\end{aligned}$$

Po drodze skorzystaliśmy z tego, że dla $i = 2$ wyrażenie $\frac{i(i-1)(i-2)}{6}$ jest równe 0 oraz z (1).

5 Liczby w-wymiarowe

Na podstawie obserwacji poprzednich wzorów można wymyślić wzór dla dowolnego wymiaru w. Ostatnim zatem zadaniem będzie udowodnienie poprawności poniższego wzoru.

Twierdzenie 1. *Liczba kul potrzebnych do ułożenia n-tej liczby k-kątnej w-wymiarowej wyraża się wzorem:*

$$\binom{n+w-1}{w} \frac{(k-2)(n-1)+w}{n+w-1}$$

Dowód. Postępujemy w sposób indukcyjny ze względu na w.

Krok 1 Dla $w = 2$ wzór przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{2} \frac{(k-2)(n-1)+2}{n+1} &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(k-2)(n-1)+2}{n+1} = \\
&= n \cdot \frac{(n-1)(k-2)+2}{2}
\end{aligned}$$

Widzimy, że dla takiego w jest to prawdą.

Krok 2 Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla pewnego w. Udowodnimy prawdziwość tego twierdzenia dla $w + 1$.

Tak jak wcześniej, wprost z definicji, n-ta liczba k-kątna $(w+1)$-wymiarowa wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\binom{i+w-1}{w}\frac{(k-2)(i-1)+w}{i+w-1}= \\
&\qquad=\sum_{i=1}^{n}\binom{i+w-1}{w}\frac{(k-2)(i-1)}{i+w-1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{i+w-1}{w}\frac{w}{i+w-1}= \\
&\qquad=(k-2)\cdot\sum_{i=1}^{n}\binom{i+w-1}{w}\frac{(i-1)}{i+w-1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{i+w-1}{w}\frac{w}{i+w-1}= \\
&\qquad=(k-2)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+w-1)!}{(i-1)!\cdot w!}\cdot\frac{(i-1)}{i+w-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+w-1)!}{(i-1)!\cdot w!}\cdot\frac{w}{i+w-1}= \\
&\qquad=(k-2)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+w-2)!}{(i-2)!\cdot w!}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+w-2)!}{(i-1)!\cdot(w-1)!}= \\
&\qquad=(k-2)\cdot\sum_{i=1}^{n}\binom{i+w-2}{w}+\sum_{i=1}^{n}\binom{i+w-2}{w-1}= \\
&\qquad=(k-2)\cdot\sum_{i=2}^{n}\binom{i+w-2}{w}+\sum_{i=1}^{n}\binom{i+w-2}{w-1}
\end{aligned}$$

Ostatnie przejście jest możliwe, gdyż $\binom{a}{b}=0$ dla $a<b$. Musimy teraz zmienić indeksy przy sigmach. Podstawiamy $j=i+w-2$, czyli $i=j-w+2$, a następnie korzystamy z (1).

$$\begin{aligned}
&(k-2)\cdot\sum_{j=w}^{n+w-2}\binom{(j-w+2)+w-2}{w}+\sum_{j=w-1}^{n+w-2}\binom{(j-w+2)+w-2}{w-1}= \\
&\qquad=(k-2)\cdot\sum_{j=w}^{n+w-2}\binom{j}{w}+\sum_{j=w-1}^{n+w-2}\binom{j}{w-1}= \\
&\qquad=(k-2)\cdot\binom{n+w-1}{w+1}+\binom{n+w-1}{w}= \\
&\qquad=(k-2)\cdot\binom{n+w}{w+1}\cdot\frac{n-1}{n+w}+\binom{n+w}{w+1}\cdot\frac{w+1}{n+w}= \\
&\qquad=\binom{n+w}{w+1}\frac{(k-2)(n-1)+w+1}{n+w}
\end{aligned}$$

$\square$